第 39 卷 第 6 期
2022 年 12 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 39 No. 6
Dec. 2022

文章编号:1000- 4939(2022)06-1065- 11

再生光滑梯度无网格法动力特性研究

付赛赛[1],邓立克[1],吴俊超[2],王东东[1],张灿辉[1]

(1. 厦门大学土木工程系,福建省滨海土木工程数字仿真重点实验室,361005 厦门;
2. 华侨大学土木工程学院,福建省智慧基础设施与监测重点实验室,361021 厦门)

摘 要:无网格形函数的非多项式特性导致梯度计算复杂耗时,同时高斯积分方法不满足积分约束条件,因此传统伽辽金无网格法难以达到理论收敛率。再生光滑梯度的构造特点使其自然满足积分约束条件,并有效地避免计算无网格形函数的直接梯度,因而具有高效和精确的特点。为了探究再生光滑梯度无网格法的动力特性,本研究构造了基于再生光滑梯度理论的伽辽金无网格法的动力分析方法,详细研究了再生光滑梯度无网格法的动力计算精度,包括频散特性、自由振动和时程动力分析。再生光滑梯度无网格法采用再生光滑梯度替代传统的无网格形函数梯度,由于其本身与积分约束条件的内在一致性,直接采用基函数对应阶次的低阶高斯积分方法对质量和刚度矩阵进行数值积分,即可保证最优收敛率和精度。理论分析与数值计算结果均表明,再生光滑梯度无网格法的频散特性、频率收敛率和时程动力计算精度,都明显优于采用高阶高斯积分方法的传统无网格法。

关键词:无网格法;动力分析;再生光滑梯度;收敛性;精度

中图分类号:O242.2　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10. 11776/j. issn. 1000-4939. 2022. 06. 007

Characteristics of dynamic meshfree analysis with reproducing kernel smoothed gradients

FU Saisai[1], DENG Like[1], WU Junchao[2], WANG Dongdong[1], ZHANG Canhui[1]

(1. Fujian Key Laboratory of Digital Simulations for Coastal Civil Engineering, Department of Civil Engineering, Xiamen University, 361005 Xiamen, China; 2. Key Laboratory for Intelligent Infrastructure and Monitoring of Fujian Province, College of Civil Engineering, Huaqiao University, 361021 Xiamen, China)

Abstract: The gradient valuation of non-polynomial type meshfree shape functions is usually very complex and costly, which leads to an undesirable fact, i. e., even very high order Gauss quadrature rules cannot ensure an optimal convergence of Galerkin meshfree formulation. The reproducing kernel smoothed gradients of meshfree shape functions naturally meet the Galerkin integration constraint, which completely avoid the time consuming computation of meshfree shape function gradients, and thus is highly efficient and accurate. In order to assess the dynamic performance of reproducing kernel smoothed gradient meshfree algorithm, this work presents a dynamic meshfree analysis with reproducing kernel smoothed gradients and the

收稿日期:2022-09-09　　**修回日期:**2022-09-29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12072302;12102138);福建省自然科学基金资助项目(No. 2021J02003)
通信作者:王东东, 教授。E-mail: ddwang@ xmu. edu. cn
引用格式:付赛赛,邓立克,吴俊超,等. 再生光滑梯度无网格法动力特性研究[J]. 应用力学学报,2022,39(6):1065-1075.
FU Saisai, DENG Like, WU Junchao, et al. Characteristics of dynamic meshfree analysis with reproducing kernel smoothed gradients[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(6):1065-1075.

convergence and accuracy are particularly investigated in detail, including the dispersion analysis, free vibration analysis and transient analysis. Since the present algorithm inherits the integration consistency of Galerkin formalism, the relatively low order Gauss quadrature rules corresponding to the basis order in meshfree approximation are capable of producing the optimal convergence with superior accuracy. Both theoretical and computational results consistently demonstrate that, regarding the dispersion analysis, frequency convergence as well as transient response, the reproducing kernel smoothed gradient Galerkin meshfree formulation gains much more favorable solution accuracy for dynamic meshfree analysis, compared with the conventional meshfree scheme using high order Gauss integration.

Key words: meshfree method; dynamic analysis; reproducing kernel smoothed gradient; convergence; accuracy

无网格法[1-5]将计算区域离散为一系列节点,仅利用节点的位置信息即可构造高阶光滑、全域协调的形函数,因而被广泛地应用于大变形分析[6]、薄板壳高阶问题计算[7-8]、各向异性材料热弹性问题分析[9]、结构振动分析[10-11]等。虽然伽辽金无网格法具有鲁棒性好、精度高的特点,但是一般情况下,无网格形函数为有理式,并且背景积分单元与形函数影响域无规则相交,因而实际计算中为了得到理想的计算结果,每个背景积分单元需要采用高阶高斯积分。另一方面,高阶高斯积分方法的采用又会严重降低无网格法的计算效率[12-14],阻碍了无网格法模拟大规模问题。因此,发展高效精确的伽辽金无网格数值积分方法便成为无网格法研究的一个重要方向。针对上述问题,许多学者提出了各具特色的数值积分方案。例如,Chen 等[15]系统提出了伽辽金无网格法的线性积分约束条件,发展了高效的且能够适用于线性基函数的稳定节点积分方案。针对节点积分方案,Liu 等[16]研究了一种径向点插值积分方法,但该方法的计算结果依赖参数的选择。Duan等[17]拓展了线性积分约束条件,提出了一致积分法,该方法满足了高阶积分约束条件,但其需要在每个背景积分单元求解方程组来构造形函数梯度。Chen 等[18]在彼得罗夫伽辽金框架下,通过重构特定的权函数,建立了能够满足任意阶积分约束条件的数值积分方法,但是彼得罗夫伽辽金列式会产生非对称刚度矩阵。Hillman 等[19]对稳定和变分一致的节点积分方案进行了系统的研究,并将其应用至冲击破坏问题。

Wang 等[20]基于应变光滑方法和理查德外推法,发展了一种具有二阶准确特性的嵌套子域积分高效无网格法。随后,Wang 等[21]进一步建立了具有显式积分特性的,且适用于任意次基函数的再生光滑梯度无网格法理论框架,简洁起见,也称其为再生梯度法。该理论框架满足伽辽金无网格法的积分约束条件与无网格形函数的梯度再生条件,具有高精度、高效率的特点,并能够保证伽辽金无网格法的一致收敛性[22-23]。在此基础上,吴俊超等[24]基于赫林格-赖斯纳(Hellinger-Reissner)变分原理,发展了一种具有变分一致特性的高效无网格强制边界条件施加方法。该方法保证了离散系统的稳定性,同时不依赖任何人工参数。另一方面,无网格法与机器学习的结合近期也得到了关注。例如,陈健等[25]基于循环卷积神经网络提出了一种无网格动力分析代理模型,其不仅可以加速动力分析的计算过程,同时可以保证数值计算精度。针对热参数辨识问题,梁钰等[26]采用径向基函数训练热参数,构造了一种参数空间与时域空间双向压缩代理模型,具有能够快速搜索任意参数的时域响应特点。

值得指出的是,再生梯度法[21]虽然实现了精确和高效的静力分析,但仍缺乏对其动力特性的研究。针对该问题,本研究分析了再生梯度法的动力特性,包括频散特性、自由振动和时程分析。结果表明,与采用传统形函数梯度的伽辽金无网格法相比,再生梯度法不仅具有更优的频散精度和收敛特性,而且所需高斯积分点数较少,计算效率更高。

1 无网格近似与再生光滑梯度理论

1.1 再生核无网格形函数

无网格法通过在分析区域 Ω 和边界 Γ 上布置一系列节点 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{\mathrm{NP}}$ 来实现空间离散,其中 NP 代表无网格节点数量。每个无网格节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的形函数为 $\Psi_I(\boldsymbol{x})$,影响域为 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}_I)$。考虑任意变量

$u(\boldsymbol{x},t)$，其对应的无网格近似函数 $u^h(\boldsymbol{x},t)$ 为

$$u^h(\boldsymbol{x},t) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_I(t) \quad (1)$$

其中：t 为时间；d_I 为与节点 $\boldsymbol{x}_I$ 对应的系数。

根据再生核近似理论[2]，无网格形函数可假设为如下形式。

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})\varphi_{s_I}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \quad (2)$$

其中：$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ 为待定系数向量；$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 为 p 阶单项式基向量，且

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \{1, x, y, \cdots, x^i y^j, \cdots, y^p\}^{\mathrm{T}}, 0 \leqslant i + j \leqslant p \quad (3)$$

其中 $\varphi_{s_I}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$ 为附属于节点 $\boldsymbol{x}_I$ 的核函数，其影响域的大小由影响域尺寸 s_I 确定，核函数及其影响域的大小共同决定了无网格形函数的局部紧支性和光滑性。方便起见，本研究均采用 3 次 B 样条核函数进行计算，二维问题的影响域为张量积形式矩形域。

将一致性条件引入式(2)，即可得到未知系数向量 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$，进而可得到无网格形函数表达式为

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 为矩量矩阵，且

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \quad (5)$$

对式(4)进行微分，即可得到无网格形函数的一阶梯度为

$$\Psi_{I,i}(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{p}_{,i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{,i}^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_{,i}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{0}) \quad (6)$$

由式(4)和(6)的表达式可以看出，无网格形函数一般为有理式，因而其梯度计算复杂耗时。为了避免直接计算无网格形函数梯度，提高计算效率，文献[21]提出了适用于任意次无网格基函数的再生光滑梯度构造理论。

1.2　再生光滑梯度理论

假设场变量 $u(\boldsymbol{x},t)$ 为任意的 p 阶多项式，则其梯度 $u_{,i}(\boldsymbol{x},t)$ 可以表示为

$$u_{,i}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \quad (7)$$

其中：$\boldsymbol{a}_i$ 为任意系数向量；$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ 为 $(p-1)$ 阶的单项式基向量，即 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{[p-1]}(\boldsymbol{x})$。由文献[15,17]可知 $(p-1)$ 阶积分约束条件为

$$\int_{\Omega} \Psi_{I,i}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \Psi_I \boldsymbol{q} n_i\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \Psi_I\,\boldsymbol{q}_{,i}\,\mathrm{d}\Omega \quad (8)$$

由式(8)可见，对于 p 次基函数，伽辽金弱形式所采用的数值积分方法只有精确满足 $(p-1)$ 阶积分约束条件，无网格数值解才能重现对应的多项式精确解。

根据再生光滑梯度理论[21]，与再生核无网格形函数类似，无网格形函数 Ψ_I 的再生光滑梯度 $\tilde{\Psi}_{I,i}$，可表示为如下形式。

$$\tilde{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}_i(\boldsymbol{x}_I)\,\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}) \quad (9)$$

其中：$\boldsymbol{c}_i$ 为待定系数向量；$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 为核函数，这里取为

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Omega_C \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin \Omega_C \end{cases} \quad (10)$$

其中：Ω_C 为互相不重叠且 $\cup_{C=1}^{N_C}\Omega_C = \Omega$ 的积分单元；N_C 表示积分单元的总个数。图 1 给出了再生光滑梯度无网格法采用的三角形背景积分单元。不失一般性，这里以三次基函数为例详细阐明再生光滑梯度构造过程。当采用三次基函数 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 时，$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ 的表达式为

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = (1, x, y, x^2, y^2, xy)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_C \quad (11)$$

将式(11)代入积分约束条件式(8)，可得

$$\int_{\Omega_C} \Psi_{I,i}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\Omega = \tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^{C},\ I = 1,2,\cdots,NP \quad (12)$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^{C} = \int_{\Gamma_C} \Psi_I \boldsymbol{q} n_i\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_C} \Psi_I\,\boldsymbol{q}_{,i}\,\mathrm{d}\Omega \quad (13)$$

再用式(9)定义的再生光滑梯度 $\tilde{\Psi}_{I,i}$ 替换到式(12)中的标准梯度 $\Psi_{I,i}$，可得 $\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{G}_C^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^{C}$，其中 $\boldsymbol{G}_C$ 为再生光滑梯度的矩量矩阵，且

$$\boldsymbol{G}_C = \int_{\Omega_C} \boldsymbol{q}\,\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\Omega \quad (14)$$

便于后续数值积分，如图 1 所示，这里将三角形积分域投影至参数空间。在投影后的三角形积分域内采用高斯积分即可求解得到 $\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^{C}$，具体表达式为

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^{C} = \sum_{C=1}^{N_C}\sum_{GB=\Lambda(\Gamma_C)} \Psi_I(\boldsymbol{x}_{GB})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_{GB}) n_i J(\boldsymbol{x}_{GB})\,\bar{\omega}_{GB} - \sum_{C=1}^{N_C}\sum_{GI=\Lambda(\Omega_C)} \Psi_I(\boldsymbol{x}_{GI})\,\boldsymbol{q}_{,i}(\boldsymbol{x}_{GI}) J(\boldsymbol{x}_{GI})\,\bar{\omega}_{GI} \quad (15)$$

其中：Λ 为背景积分单元内部或边界上的高斯积分点总数量；$\boldsymbol{x}_{GB}$、$\bar{\omega}_{GB}$ 为背景积分单元边界上的高斯积

分点位置和相应的权重;$\boldsymbol{x}_{GI}$、$\bar{\omega}_{GI}$为背景积分单元内的高斯积分点位置与配套的权重;J为背景积分单元联系物理和参数空间的雅克比矩阵行列式。注意到式(14)中的$\boldsymbol{G}_C$可以直接解析计算,无需采用数值积分[27]。

结合式(9)及(15),即可得背景积分域内的再生光滑梯度表达式为

$$\tilde{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{G}_C^{-1}\tilde{\boldsymbol{g}}_{iI}^{C},\ \boldsymbol{x}\in\Omega_C \tag{16}$$

由式(16)的再生光滑梯度表达式可以看出,再生光滑梯度通过直接构造得到,避免了标准无网格梯度的复杂计算,显著提高了梯度计算效率。图2给出了一维和二维情况下采用三次基函数构造的无网格形函数标准梯度与再生光滑梯度。

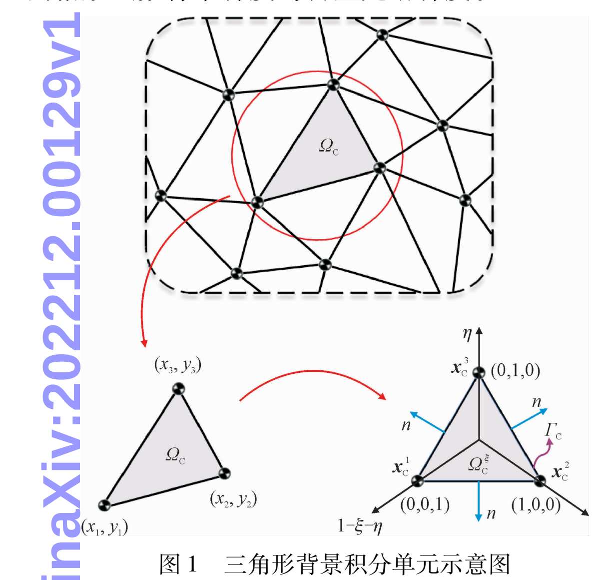


图1 三角形背景积分单元示意图

Fig. 1 Schematic diagram of triangular background integration cells

需要指出的是,上述再生光滑梯度仅用于刚度矩阵的构建,而对于后处理过程中的应变和应力计算,仍采用式(4)和(6)的无网格形函数及其梯度。这样做的主要原因是再生光滑梯度并非全域连续函数,若采用其进行后处理还需要进一步采用其他的全域应力光滑方法。因此,一种比较简便的后处理方法是基于再生光滑梯度所求得的高精度节点系数,采用全域光滑的标准形函数梯度直接计算应变和应力结果。

此外,注意到无网格形函数再生光滑梯度的影响域与标准梯度的影响域不完全相同。这是由于再生光滑梯度是基于背景积分单元构造的,与无网格形函数影响域相交的背景积分单元组成了再生光滑梯度的影响域,所以再生光滑梯度的影响域一般略大于无网格形函数标准梯度的影响域。当采用线性基函数时,式(16)即退化为稳定节点积分采用的光滑梯度[15,21]。

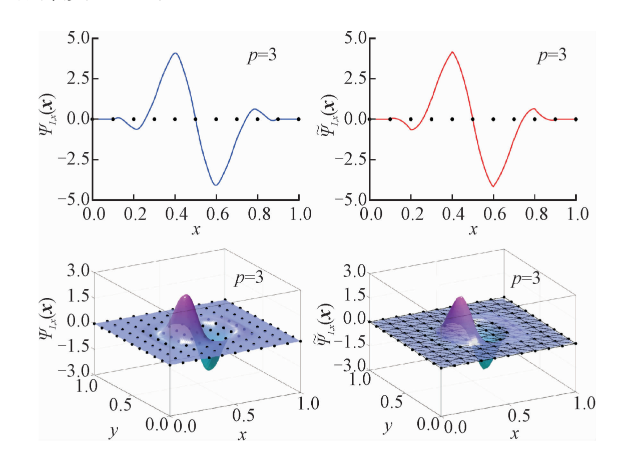


图2 一维和二维三次基无网格形函数的标准梯度与再生光滑梯度

Fig. 2 Standard and reproducing kernel smoothed gradients for one-dimensional and two-dimensional meshfree shape function with cubic basis

2 再生光滑梯度无网格法的离散方程及频散精度

2.1 离散方程

不失一般性,考虑如下典型波动方程,即

$$\begin{cases} \ddot{u}(\boldsymbol{x},t) = c^2[u_{,xx}(\boldsymbol{x},t) + u_{,yy}(\boldsymbol{x},t)] + b(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{x}\in\Omega \\ u(\boldsymbol{x},t) = g(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma^g \\ c^2\boldsymbol{n}\cdot\nabla u(\boldsymbol{x},t) = \bar{t}(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma^t \\ u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega \\ \dot{u}(\boldsymbol{x},0) = \dot{u}_0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega \end{cases} \tag{17}$$

其中:c为波速;∇为空间梯度算子;b为源项;Γ^t和Γ^g分别代表自然和强制边界;$\bar{t}$和g为对应的给定边界值;$\boldsymbol{n}=\{n_x,n_y\}^{\mathrm{T}}$为边界的外法向;场变量$u$上部的点和下标的逗号分别表示时间和空间导数。

对于式(17)所定义的波动方程,其等效积分弱形式为

$$\int_\Omega \delta u\ddot{u}\mathrm{d}\Omega + c^2\int_\Omega \nabla\delta u\cdot\nabla u\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \delta ub\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma^t}\delta u\bar{t}\mathrm{d}\Gamma \tag{18}$$

其中δ为变分符号。将式(1)代入式(18)中,即可得到无网格运动离散方程为

$$M\ddot{d} + Kd = \tilde{f} \tag{19}$$

其中,M、K 和 $\tilde{f}$ 分别表示一致质量矩阵、刚度矩阵和力向量,其具体表达式为

$$M_{IJ} = \int_{\Omega} \Psi_I(x)\Psi_J(x)\mathrm{d}\Omega \tag{20}$$

$$K_{IJ} = c\int_{\Omega} (\nabla\Psi_I(x))^{\mathrm{T}}\nabla\Psi_J(x)\mathrm{d}\Omega \tag{21}$$

$$\tilde{f}_I = \int_{\Omega}\Psi_I(x)b\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma^t}\Psi_I(x)\,\bar{t}\mathrm{d}\Gamma \tag{22}$$

若将式(21)中的$\nabla\Psi_I(x)$替换为再生光滑梯度$\nabla\tilde{\Psi}_I(x)$,即可得到再生梯度法的刚度矩阵表达式为

$$\tilde{K}_{IJ} = c^2\int_{\Omega}(\nabla\tilde{\Psi}_I(x))^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\Psi}_J(x)\mathrm{d}\Omega \tag{23}$$

与式(15)相同,这里刚度矩阵与一致质量矩阵的计算均采用高斯积分方法。因此,式(20)和(23)可分别表示为

$$M_{IJ} = \sum_{C=1}^{N_C}\sum_{\mathrm{GI}=\Lambda(\Omega_C)}\Psi_I(x_{\mathrm{GI}})\Psi_J(x_{\mathrm{GI}})J(x_{\mathrm{GI}})\,\bar{\omega}_{\mathrm{GI}} \tag{24}$$

$$\tilde{K}_{IJ} = \sum_{C=1}^{N_C}\sum_{\mathrm{GI}=\Lambda(\Omega_C)}\tilde{\nabla}\Psi_I(x_{\mathrm{GI}})\,\tilde{\nabla}\Psi_J(x_{\mathrm{GI}})J(x_{\mathrm{GI}})\,\bar{\omega}_{\mathrm{GI}} \tag{25}$$

其中$\tilde{\nabla}\Psi_I = \{\tilde{\Psi}_{I,x},\tilde{\Psi}_{I,y}\}^{\mathrm{T}}$。

同时,无网格形函数的非插值特点导致其无法像有限元法一样直接施加强制边界,因此需要辅助其它方法来进行施加强制边界,例如拉格朗日乘子法、罚函数法或尼兹(Nitsche)方法等[4,24]。本研究利用再生光滑梯度的内在特点,采用文献[24]提出的赫林格-赖斯纳变分一致方法来施加边界条件,但这里给出了该方法更广义的加权残值构造格式。根据该方法,场变量 u 和其梯度 $u_{,i}$ 为两个独立变量,此时考虑引入边界条件的等效积分弱形式为

$$0 = \int_{\Omega}\delta u(c^2u_{,ii} + b - \ddot{u})\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma^g}\delta u_{,i}c^2n_i(u-g)\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma^t}\delta u(c^2u_{,i}n_i - \bar{t})\mathrm{d}\Gamma \tag{26}$$

对式(26)引入分部积分,有

$$0 = \int_{\Gamma^g}\delta uc^2u_{,i}n_i\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega}\delta u_{,i}c^2u_{,i}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta ub\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}\delta u\ddot{u}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma^g}\delta u_{,i}c^2n_iu\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma^g}\delta u_{,i}c^2n_ig\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma^t}\delta u\bar{t}\mathrm{d}\Gamma \tag{27}$$

进一步利用自然边界 Γ^t 和强制边界 Γ^g 的互补关系,即 $\Gamma^g = \Gamma/\Gamma^t$,有

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^g}\delta uc^2u_{,i}n_i\mathrm{d}\Gamma &= \int_{\Gamma}\delta uc^2u_{,i}n_i\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma^t}\delta uc^2u_{,i}n_i\mathrm{d}\Gamma \\ &= \int_{\Omega}\delta u_{,i}c^2u_{,i}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta uc^2u_{,ii}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma^t}\delta uc^2u_{,i}n_i\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^g}\delta u_{,i}c^2n_iu\mathrm{d}\Gamma &= \int_{\Gamma}\delta u_{,i}c^2n_iu\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma^t}\delta u_{,i}c^2n_iu\mathrm{d}\Gamma \\ &= \int_{\Omega}\delta u_{,ii}c^2u\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta u_{,i}c^2u_{,i}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma^t}\delta u_{,i}c^2n_iu\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{29}$$

将式(28)和(29)代入式(27),并利用δu 和$\delta u_{,i}$的独立性,可得如下的等效积分弱形式,即

$$\int_{\Omega}\nabla\delta u\cdot\nabla u\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma^t}(n\cdot\nabla\delta u)u\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega}(\nabla\cdot\nabla\delta u)u\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma^g}(n\cdot\nabla\delta u)g\mathrm{d}\Gamma \tag{30}$$

$$\int_{\Omega}\delta u\ddot{u}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma^t}\delta uc^2(n\cdot\nabla u)\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega}\delta uc^2(\nabla\cdot\nabla u)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega}\delta ub\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma^t}\delta u\bar{t}\mathrm{d}\Gamma \tag{31}$$

在一个典型的背景积分单元 Ω_C 中,将无网格场变量离散式(1)以及梯度离散式(7)代入式(30),可得

$$a_i = G_C^{-1}\sum_{I=1}^{\mathrm{NP}}(\tilde{g}_{iI}^C - \hat{g}_{iI}^C)d_I + G_C^{-1}\,\overset{\frown}{g}{}_i^C \tag{32}$$

其中 Γ_C 为 Ω_C 的边界;$\tilde{g}_{iI}^C$见式(13);$\hat{g}_{iI}^C$和$\overset{\frown}{g}{}_i^C$ 见式(33)。

$$\hat{g}_{iI}^C = \int_{\Gamma^g\cap\Gamma_C}\Psi_Iqn_i\mathrm{d}\Gamma,\ \overset{\frown}{g}{}_i^C = \int_{\Gamma^g\cap\Gamma_C}qn_ig\mathrm{d}\Gamma \tag{33}$$

利用式(32),场变量 u 的离散梯度可以表示为

$$u_{,i}^h = q^{\mathrm{T}}a_i = \sum_{I=1}^{\mathrm{NP}}(\tilde{\Psi}_{I,i} - \hat{\Psi}_{I,i})d_I + q^{\mathrm{T}}G_C^{-1}\,\overset{\frown}{g}{}_i^C \tag{34}$$

其中 $\tilde{\Psi}_{I,i}$见式(16),$\hat{\Psi}_{I,i} = q^{\mathrm{T}}G_C^{-1}\hat{g}_{iI}^C$。

将式(1)和(34)代入式(31),即得考虑边界条件的系统离散方程[24]为

$$M\ddot{d} + Kd = f \tag{35}$$

$$K = \tilde{K} + \bar{K} + \hat{K},\ f = \tilde{f} + \bar{f} + \hat{f} \tag{36}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ 见式(24)~(25)；$\widetilde{\boldsymbol{f}}$ 见式(22)；$\overline{\boldsymbol{K}}$、$\hat{\boldsymbol{K}}$ 和力向量 $\overline{\boldsymbol{f}}$、$\hat{\boldsymbol{f}}$ 中的元素见式(37)。

$$\begin{cases}\overline{K}_{IJ}=-\int_{\Gamma^g}\Psi_I\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}c^2\ \widetilde{\nabla}\ \Psi_J\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma^g}(\widetilde{\nabla}\ \Psi_I)^{\mathrm{T}}c^2\boldsymbol{n}\Psi_J\mathrm{d}\Gamma\\ \overline{f}_I=-\int_{\Gamma^g}(\widetilde{\nabla}\ \Psi_I)^{\mathrm{T}}c^2\boldsymbol{n}g\mathrm{d}\Gamma\end{cases}\tag{37}$$

$$\begin{cases}\hat{K}_{IJ}=\int_{\Gamma^g}(\widetilde{\nabla}\ \Psi_I)^{\mathrm{T}}c^2\boldsymbol{n}\Psi_J\mathrm{d}\Gamma\\ \hat{f}_I=\int_{\Gamma^g}(\hat{\nabla}\Psi_I)^{\mathrm{T}}c^2\boldsymbol{n}g\mathrm{d}\Gamma\end{cases}\tag{38}$$

其中 $\hat{\nabla}\Psi_I=\{\hat{\Psi}_{I,x},\ \hat{\Psi}_{I,y}\}^{\mathrm{T}}$。由上可见，强制边界条件是通过 $\overline{\boldsymbol{K}}$ 与 $\overline{f}$ 施加的，而 $\hat{K}$ 与 $\hat{f}$ 则起到稳定算法的作用。与尼兹法[4]不同，这里的稳定项不需要人工参数。

对于时间域离散，本研究采用 HHT(Hilbert-Huang transform)方法[28]，该方法仍然采用 Newmark 法的预测-矫正算法，位移和速度系数向量预测和矫正阶段的表达式分别为

1)预测阶段

$$\begin{cases}\widehat{\boldsymbol{d}}_{m+1}=\boldsymbol{d}_m+(\Delta t)\boldsymbol{v}_m+\dfrac{(\Delta t)^2}{2}(1-2\beta)\boldsymbol{a}_m\\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{m+1}=\boldsymbol{v}_m+(\Delta t)(1-\gamma)\boldsymbol{a}_m\end{cases}\tag{39}$$

2)矫正阶段

$$\begin{cases}\boldsymbol{d}_{m+1}=\widehat{\boldsymbol{d}}_{m+1}+\beta(\Delta t)^2\boldsymbol{a}_{m+1}\\ \boldsymbol{v}_{m+1}=\widehat{\boldsymbol{v}}_{m+1}+\gamma\Delta t\,\boldsymbol{a}_{m+1}\end{cases}\tag{40}$$

其中：$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{d}}$，$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}$；$\beta$ 和 γ 是积分参数；Δt 是从 t_m 到 t_{m+1} 时刻的时间步长，下标“m”表示相应时刻的量。

根据 HHT 方法[28]，时间-空间全离散的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_{m+1}+(1+\alpha)\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_{m+1}-\alpha\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_m=\boldsymbol{f}_{m+\alpha}\tag{41}$$

$$\boldsymbol{f}_{m+\alpha}=\boldsymbol{f}(t_{m+\alpha}),t_{m+\alpha}=t_{m+1}+\alpha\Delta t\tag{42}$$

其中 α 为 HHT 方法的参数，当选取 $\alpha\in[-1/3,0]$，$\beta=(1-\alpha)^2/4$，$\gamma=(1-2\alpha)/2$ 时，该时间积分方法无条件稳定。将式(40)代入式(41)，即可得到加速度系数向量的更新方程为

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{M}+(1+\alpha)\beta(\Delta t)^2\boldsymbol{K}]\boldsymbol{a}_{m+1}\\&=\boldsymbol{f}_{m+\alpha}+\alpha\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_m-(1+\alpha)\boldsymbol{K}\widehat{\boldsymbol{d}}_{m+1}\end{aligned}\tag{43}$$

由式(43)解得 $\boldsymbol{a}_{m+1}$ 后，即可通过式(40)计算 t_{m+1} 时刻的速度和位移系数向量。

2.2　频散精度分析

频散特性是度量离散动力系统精度的一种有效方法。在频散特性中，研究对象为自由振动，不考虑外力和边界条件的影响，这时运动方程式(35)只包含由均匀无网格节点布置得到的离散质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和再生光滑梯度组成的刚度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$，对应的自由振动方程为

$$-(\omega^h)^2\sum_{J\in S_{JI}}M_{IJ}d_J+\sum_{J\in S_{JI}}\widetilde{K}_{IJ}d_J=0\tag{44}$$

其中：$S_{JI}=\{J|\mathrm{supp}(\boldsymbol{x}_J)\cap\mathrm{supp}(\boldsymbol{x}_I)\neq\varnothing\}$；$\omega^h$ 表示频率数值解。

对节点系数 $d_J(t)$ 引入简谐波假定，有

$$d_J(t)=d_0\exp[\iota(k_xx_J+k_yy_J-\omega^ht)]\tag{45}$$

式中：d_0 为波幅；$\iota=\sqrt{-1}$；k_x、k_y 分别为 x、y 方向上的波数。将式(45)代入式(44)，可得相速度 c_{np} 为

$$c_{np}=\frac{\omega^h}{\omega}=\sqrt{\frac{(kh)^{-2}\sum_{J\in S_{JI}}\widetilde{K}_{IJ}\exp[\iota(k_xx_J+k_yx_J)]}{\sum_{J\in S_{JI}}M_{IJ}h^{-2}\exp[\iota(k_xx_J+k_yx_J)]}}\tag{46}$$

式中：$\omega=c\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ 为真实频率；h 为节点间距。另一方面，频率的相对精度可以表示为

$$e_f=c_{np}-1=\frac{\omega^h}{\omega}-1\approx O(h^r)\tag{47}$$

式中 r 表示频率的收敛阶次。

图3给出了二维问题的频散计算结果，其中“GI-l”表示采用 l 个高斯积分点的传统高斯积分无网格法，“RKGS”表示再生光滑梯度无网格法。表1列出了各种方法在每个背景积分单元内所采用的高斯积分点数目。图3的频散分析结果表明，再生梯度法明显优于传统无网格法的精度。

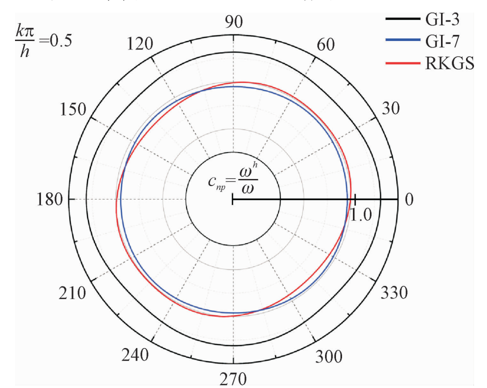


图3　不同方法的频散精度对比

Fig. 3　Comparison of dispersion analysis results by various meshfree formulations

3　数值算例

本节通过两个典型算例,对基于一致质量矩阵的再生梯度法的动力特性及计算精度进行系统分析。算例中传统无网格法与再生梯度法所采用的高斯积分点数见表 1。

表 1　不同方法使用的高斯积分点数量

Tab. 1　The number of Gauss points used by various meshfree formulations

计算模型	基函数阶次 p	标准高斯积分点数	高阶高斯积分点数	RKGS 积分点数
一维问题	2	2	6	2
	3	3	8	3
二维问题	2	3	7	3
	3	6	12	6

3.1　一维杆问题

考虑一维两端固定杆的自由振动问题。不失一般性,取杆长 $L=5$,横截面面积 A、材料密度 ρ 及杨氏模量 E 均为 1。对于该问题,其频率解析解为 $\omega_i = i\pi c/L$,其中波速 $c=\sqrt{E/\rho}$。无网格计算中采用 11、21、41 个均布节点进行收敛率分析,其中二次和三次基函数的影响域大小分别为 2.5 和 3.8。图 4 给出了标准伽辽金无网格法和再生梯度法分别采用二次与三次基函数时前两阶频率的收敛结果。结果表明,再生梯度法的频率计算结果对于二次和三次基函数分别可以达到 4 次和 6 次的最优收敛率[29],而标准伽辽金无网格法即使采用高阶高斯积分仍然无法达到相应的最优收敛阶次。同时,再生梯度法在采用较少高斯积分点情况下,其频率计算精度也远优于标准伽辽金无网格法,充分说明了再生梯度法在频率计算方面的精确性和高效性。

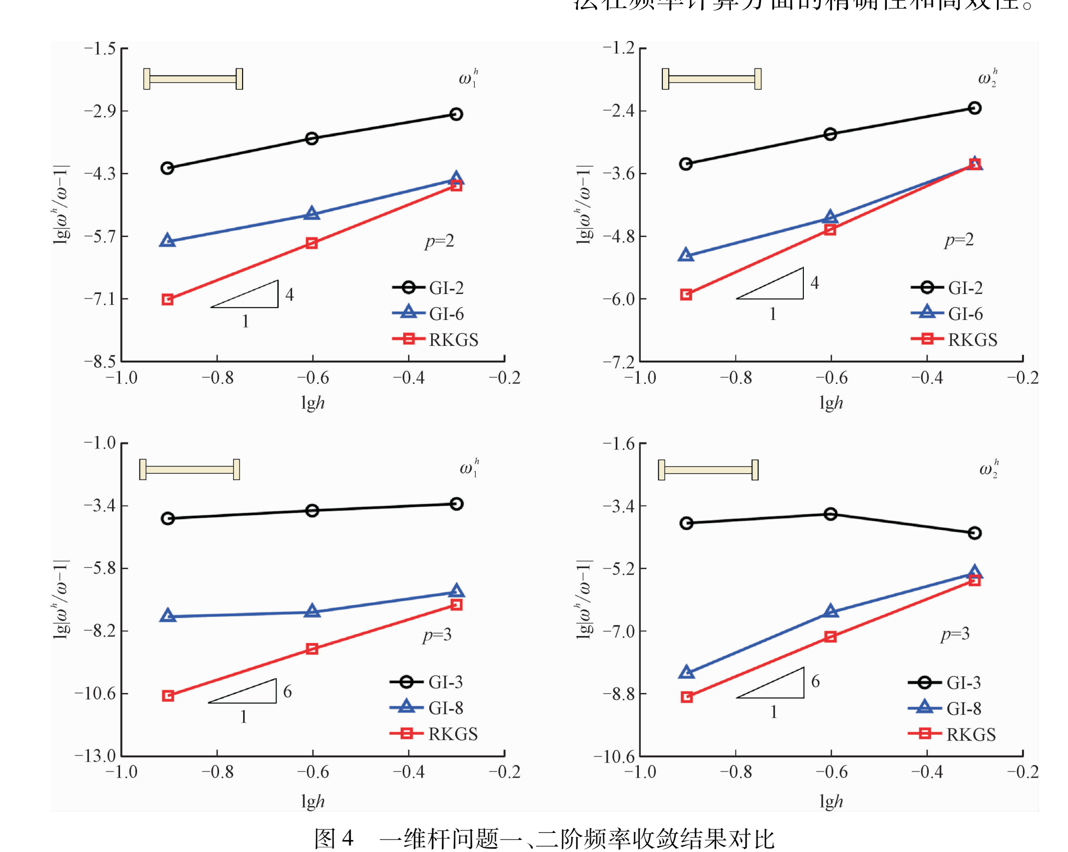


图 4　一维杆问题一、二阶频率收敛结果对比

Fig. 4　Comparison of convergence of the first and second frequencies for the 1D rod problem

为了更好地验证再生梯度法的动力特性,进一步分析一维杆问题的时程响应。计算中按照精确解[30] $u(\boldsymbol{x},t)=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{L}\right)$来设定初位移和初速度,无网格节点数为 11,HHT 时间积分方法的参数 $\alpha=-0.3$,时间积分步长 $\Delta t=0.0125$。图 5 给出了采用二次基函数时 3 种方法分别在 $x=1.0$ 和 $x=2.5$位置的位移时程曲线误差,可见,再生梯度法的动力时程分析误差明显低于采用低阶(GI-2)和高阶高斯积分(GI-3)无网格法的动力时程分析误差。

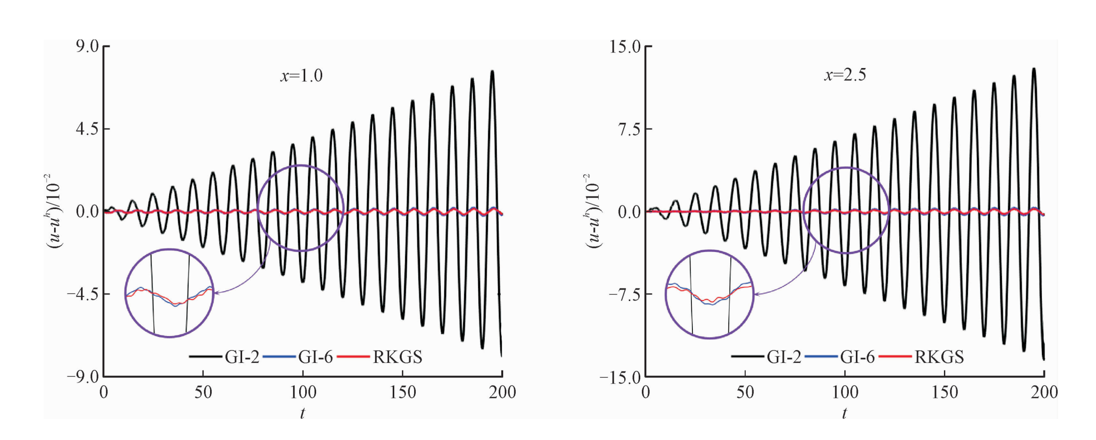


图 5 一维杆问题动力分析位移误差对比

Fig. 5 Comparison of displacement error for the dynamic analysis of 1D rod problem

3.2 二维膜问题

考虑二维四边固定方膜自由振动和动力分析问题，几何及材料参数为：边长 L、厚度 τ、密度 ρ 及面内张力 T 均取相应的单位值 1，$c=\sqrt{T/(\rho\tau)}$，其频率解析解[31]为 $\omega_{ij}=\frac{\pi c}{L}\sqrt{i^2+j^2}$。对于该问题，为了验证方法的鲁棒性，分别采用图 6 所示的均布和非均布节点离散模型进行分析，具体的节点数依次为 121、441 和 1 681。无网格形函数采用二次和三次基函数时的影响域分别为 2.8 和 3.6。图 7 ~ 8 给出了均布和非均布无网格离散情况下二维膜问题的一、二阶和二、三阶频率的收敛率。可见，无论是均布还是非均布无网格离散，再生梯度法均能达到最优收敛率 $2p$，对于二次和三次基函数即为 4 和 6。相较而言，采用 3 点和 7 点（二次基函数）、6 点和 12 点（三次基函数）高斯积分的传统无网格法呈现出精度低、收敛率低等问题。注意到对于三次基函数，频率计算结果甚至出现不收敛问题。因此，与一维计算结果类似，再生梯度法对于二维问题的频率收敛率和精度同样明显优于采用高斯积分的传统无网格法。

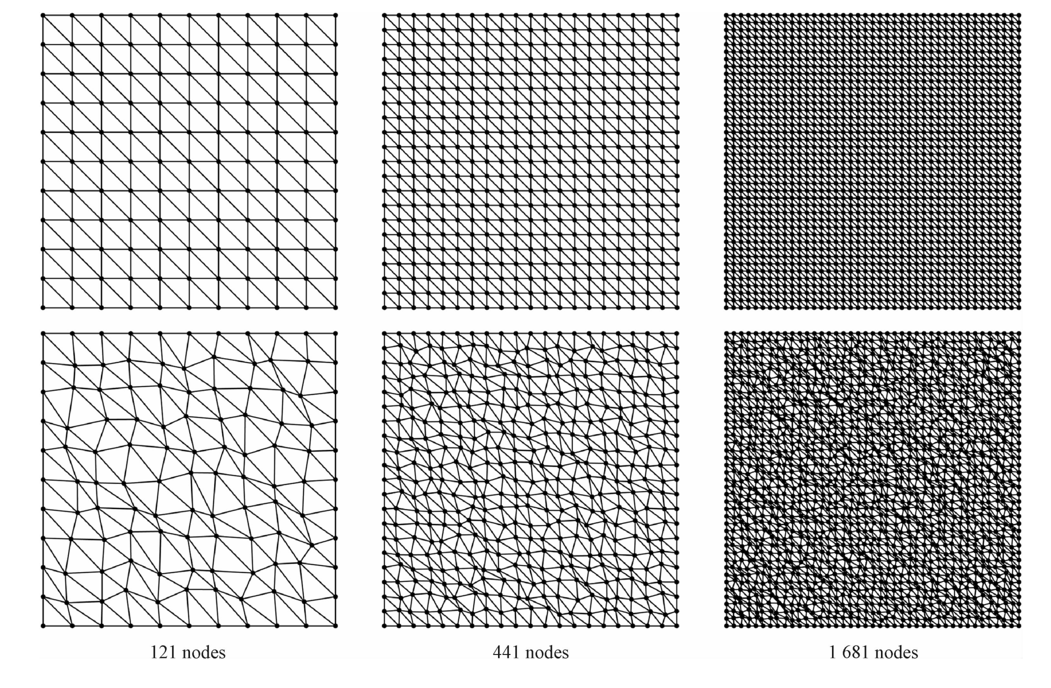


图 6 二维膜问题的均布和非均布无网格离散模型

Fig. 6 Uniform and non-uniform meshfree discretizations for the 2D membrane problem

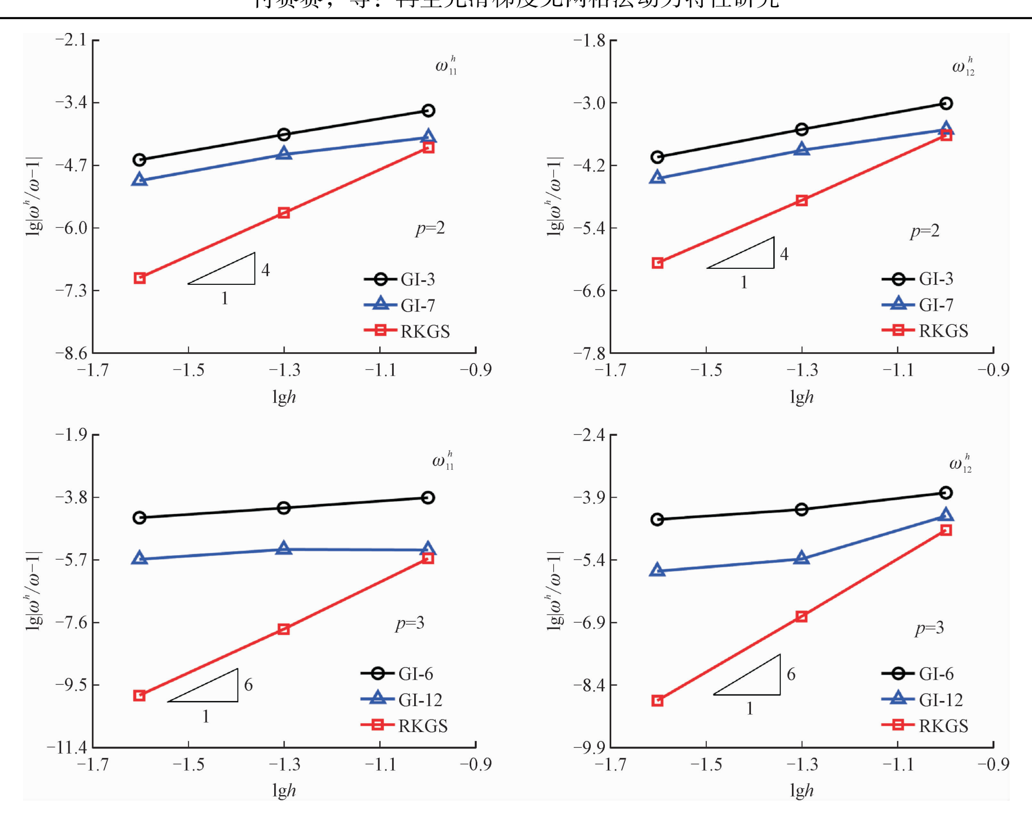


图 7　二维膜问题均布无网格离散一、二阶频率收敛结果对比

Fig. 7　Comparison of convergence of the first and second frequencies for the 2D membrane problem with uniform meshfree discretizations

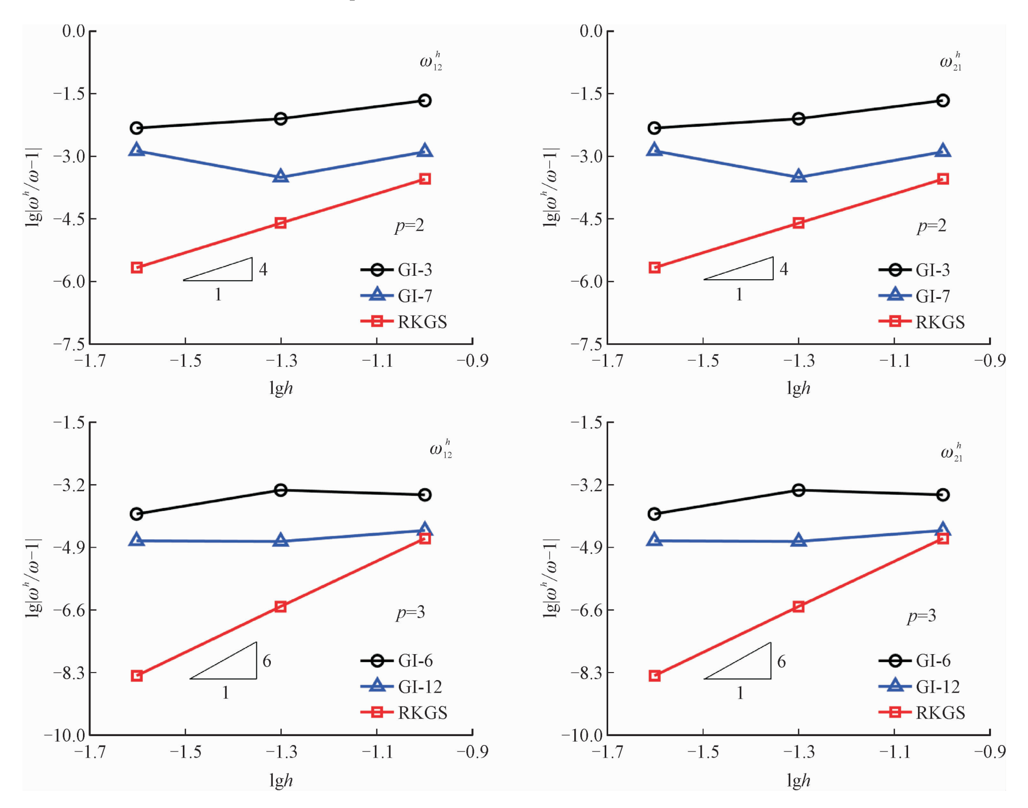


图 8　二维膜问题非均布无网格离散二、三阶频率收敛结果对比

Fig. 8　Comparison of convergence of the second and third frequencies for the 2D membrane problem with non-uniform meshfree discretizations

对于该膜问题,同样进行了动力时程分析,计算中根据解析解 $u(\boldsymbol{x},t)=2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin(\sqrt{2}\pi t)$ 选取初位移和初速度。HHT 方法中的参数 $\alpha=-0.3$,时间积分步长 $\Delta t=0.001$。图 9 给出了该模型在采用二次基函数和 121 个均布节点离散情况下,点(0.2,0.5)和点(0.4,0.4)的位移时程曲线误差对比结果。动力分析结果再次验证了再生梯度法与采用高斯积分传统无网格法相比的精度和效率优势。

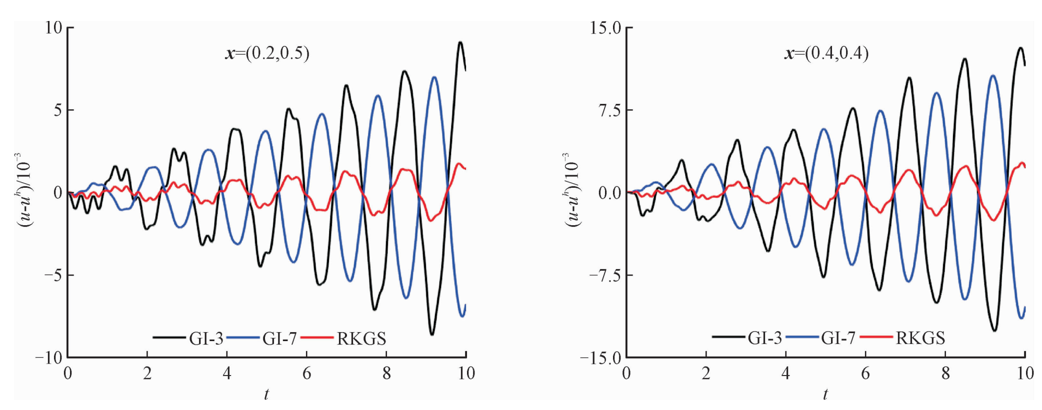


图 9 二维膜问题动力分析位移误差对比

Fig. 9 Comparison of displacement error for the dynamic analysis of 2D membrane problem

4 结 论

通过再生光滑梯度理论构建的无网格形函数光滑梯度,满足积分约束条件,消除了无网格形函数繁杂耗时的传统梯度计算,提高了无网格法的精度与效率。本研究以再生光滑梯度理论为基础,详细讨论了再生光滑梯度无网格法的动力离散方程,并通过赫林格-赖斯纳变分方法施加强制边界条件,保证了离散系统的变分一致性。最后,研究了再生梯度法的动力特性,包括频散特性、自由振动和时程动力分析。

结果表明,再生梯度法的频散精度明显高于采用高斯积分的传统伽辽金无网格法。在计算精度方面,由于再生梯度与积分约束条件具有内在一致性,因而采用较少的高斯积分点即可达到频率的最优收敛率。对于二维二次基函数,每个背景积分单元仅采用 3 点高斯即可达到 4 次收敛率,而传统无网格法即便在每个背景积分单元采用 7 个高斯积分点,仍然无法达到最优收敛率,且频率计算精度也远低于再生光滑梯度无网格法;当采用三次基函数时,采用 12 点高斯积分的传统无网格伽辽金法甚至出现频率不收敛的情况。时程动力分析的结果同样证明,再生光滑梯度无网格法的动力计算精度远优于传统伽辽金无网格法。

参考文献:

[1] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods [J]. International journal for numerical methods in engineering, 1994, 37(2):229-256.

[2] LIU W K, JUN S, ZHANG Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. International journal for numerical methods in fluids, 1995, 20(8/9):1081-1106.

[3] 张雄,刘岩,马上. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009, 39(1):1-36.
ZHANG Xiong, LIU Yan, MA Shang. Meshfree methods and their applications[J]. Advances in mechanics, 2009, 39(1):1-36(in Chinese).

[4] CHEN J S, HILLMAN M, CHI S W. Meshfree methods: Progress made after 20 years[J]. Journal of engineering mechanics, 2017, 143(4):04017001.

[5] BELYTSCHKO T, KRONGAUZ Y, ORGAN D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996, 139(1/2/3/4):3-47.

[6] 陈嵩涛,段庆林,马今伟. 几何非线性分析的高效高阶无网格法[J]. 计算力学学报, 2020, 37(6):694-699.
CHEN Songtao, DUAN Qinglin, MA Jinwei. Efficient high order meshfree method for geometrically non-linear analysis[J]. Chinese journal of computational mechanics, 2020, 37(6):694-699(in Chinese).

[7] 邓立克,王东东,王家睿,等. 薄板分析的线性基梯度光滑伽辽金无网格法[J]. 力学学报, 2019, 51(3):688-702.
DENG Like, WANG Dongdong, WANG Jiarui, et al. A gradient smoothing Galerkin meshfree method for thin plate analysis with linear basis function[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2019, 51(3):688-702(in Chinese).

[8] WANG L H, LIU Y J, ZHOU Y T, et al. Static and dynamic analysis of thin functionally graded shell with in-plane material inhomogeneity[J]. International journal of mechanical sciences, 2021, 193:106165.

[9] 张建平,刘庭显,王树森,等. 正交各向异性材料热弹性问题的三维无网格法计算模型及应用[J]. 应用力学学报,2021,38(1):1-10.
ZHANG Jianping, LIU Tingxian, WANG Shusen, et al. Three-dimensional meshless computational model and its application for thermoelastic problem of orthotropic material structure[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2021, 38(1):1-10(in Chinese).

[10] 陈莘莘,周文博,胡常福. 基于插值型无单元 Galerkin 法的复合材料层合板自由振动分析[J]. 应用力学学报,2021,38(3):1280-1285.
CHEN Shenshen, ZHOU Wenbo, HU Changfu. Free vibration analysis of laminated composite plates based on the interpolating element-free Galerkin method[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2021, 38(3):1280-1285(in Chinese).

[11] 杜超凡,周晓婷,章定国,等. 无网格法在中心刚体-旋转柔性梁系统动力学分析中的应用[J]. 振动工程学报,2022,35(1):178-187.
DU Chaofan, ZHOU Xiaoting, ZHANG Dingguo, et al. Meshless methods applied to the dynamic analysis for hub-beam system[J]. Journal of vibration engineering, 2022, 35(1):178-187(in Chinese).

[12] DOLBOW J, BELYTSCHKO T. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods[J]. Computational mechanics, 1999, 23(3):219-230.

[13] BABUŠKA I, BANERJEE U, OSBORN J E, et al. Quadrature for meshless methods[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2008, 76(9):1434-1470.

[14] 吴俊超,邓俊俊,王家睿,等. 伽辽金型无网格法的数值积分方法[J]. 固体力学学报,2016,37(3):208-233.
WU Junchao, DENG Junjun, WANG Jiarui, et al. A review of numerical integration approaches for Galerkin meshfree methods[J]. Chinese journal of solid mechanics, 2016, 37(3):208-233(in Chinese).

[15] CHEN J S, WU C T, YOON S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2001, 50(2):435-466.

[16] LIU G R, ZHANG G Y, WANG Y Y, et al. A nodal integration technique for meshfree radial point interpolation method (NI-RPIM)[J]. International journal of solids and structures, 2007, 44(11/12):3840-3860.

[17] DUAN Q L, LI X K, ZHANG H W, et al. Second-order accurate derivatives and integration schemes for meshfree methods[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2012, 92(4):399-424.

[18] CHEN J S, HILLMAN M, RÜTER M. An arbitrary order variationally consistent integration for Galerkin meshfree methods[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2013, 95(5):387-418.

[19] HILLMAN M, CHEN J S, CHI S W. Stabilized and variationally consistent nodal integration for meshfree modeling of impact problems[J]. Computational particle mechanics, 2014, 1(3):245-256.

[20] WANG D D, WU J C. An efficient nesting sub-domain gradient smoothing integration algorithm with quadratic exactness for Galerkin meshfree methods[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2016, 298:485-519.

[21] WANG D D, WU J C. An inherently consistent reproducing kernel gradient smoothing framework toward efficient Galerkin meshfree formulation with explicit quadrature[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2019, 349:628-672.

[22] WU J C, WANG D D. An accuracy analysis of Galerkin meshfree methods accounting for numerical integration[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2021, 375:113631.

[23] DU H H, WU J C, WANG D D, et al. A unified reproducing kernel gradient smoothing Galerkin meshfree approach to strain gradient elasticity[J]. Computational mechanics, 2022, 70(1):73-100.

[24] 吴俊超,吴新瑜,赵珧冰,等. 基于赫林格-赖斯纳变分原理的一致高效无网格本质边界条件施加方法[J/OL]. 力学学报,2022,54(12):1-14[2022-08-12]. DOI:10.6052/0459-1879-22-151.
WU Junchao, WU Xinyu, ZHAO Yaobing, et al. A consistent and efficient method for imposing meshfree essential boundary conditions via Hellinger-Reissner variational principle[J/OL]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2022, 54(12):1-14[2022-08-12]. DOI:10.6052/0459-1879-22-151(in Chinese).

[25] 陈健,王东东,刘宇翔,等. 无网格动力分析的循环卷积神经网络代理模型[J]. 力学学报,2022,54(3):732-745.
CHEN Jian, WANG Dongdong, LIU Yuxiang, et al. A recurrent convolutional neural network surrogate model for dynamic meshfree analysis[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2022, 54(3):732-745(in Chinese).

[26] 梁钰,高效伟,崔苗,等. 未知参数空间与时域空间双向压缩的热参数反向辨识[J]. 中国科学(技术科学),2022,52(3):415-430.
LIANG Yu, GAO Xiaowei, CUI Miao, et al. New parameter identification method based on bidirectional com-pression in the parameter space and time domain[J]. Scientia Sinica (technologica), 2022, 52(3):415-430(in Chinese).

[27] EISENBERG M A, MALVERN L E. On finite element integration in natural co-ordinates[J]. International journal for numerical methods in engineering, 1973, 7(4):574-575.

[28] HILBER H M, HUGHES T J R, TAYLOR R L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics[J]. Earthquake engineering & structural dynamics, 1977, 5(3):283-292.

[29] STRANG W G, FIX G J. An analysis of the finite element method[M]. Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall, 1973.

[30] LI X W, WANG D D, XU X L, et al. Superconvergent isogeometric transient analysis of wave equations[J]. International journal of structural stability and dynamics, 2020, 20(8):2050083.

[31] RAO S S. Vibration of continuous systems[M]. Hoboken, New York: Wiley, 2007.

（编辑　黄崇亚　李坤璐）